情報解析A 期末試験対策

2007 年度後期期末試験 (2008/02/05) 解答例

この解答例は多分に間違えてる可能性があるので注意しながら閲覧すること．問題文は Web ページにアップロードされているのでそちらを参照．間違いを見つければできる限り連絡すること．

問題 1

(1) **信頼性の要求**

誤差，雑音等による撹乱にもかかわらず，情報源からの通報なり記録が許される誤差の範囲内で，受け手に届けられる確率が十分に 1 に近いこと．

経済性の要求 1

伝送または記憶媒体の効率的利用: 同一の情報を伝送するために伝送媒体を占有する時間とか帯域幅（または記憶するために使われる記憶量）が小さいこと．

経済性の要求 2

機構化の容易さ: 符号器，復号器，変調器，復調器のコスト，処理速度，重さなどが与えられた条件を満たすこと．

(2) **一意に復号可能な符号化**

受け手が確実に一意に復号可能な符号化をし，正しく情報が伝わるようにする点で「信頼性の要求」に対応する．

瞬時に復号可能な符号化

符号器，復号器をより簡単にしつつ符号化するという点で「経済性の要求 2(機構化の容易さ)」に対応する．

最適符号化

符号化複合化に時間がかかってもできる限り小さくし通信路を効率的に利用するという点で「経済性の要求 1(伝送または記憶媒体の効率的利用)」に対応する．

問題 2

(1) シャノンの情報符号化定理 (教科書 p.45 定理 3.5 の式 3.51，式 3.52) より，「記憶のない情報源 S の一意に復号可能な q 元符号化の平均符号語長 $\bar{l}$ とすれば，

$$H_q(S) \leq \bar{l} < H_q(S) + 1$$

が成立する」ことより，情報源 S の n 次拡大に対する 2 元ハフマン符号化に関して，

$$\text{上界：}\quad O(H_2(S^n) + 1)$$
$$\text{下界：}\quad \Omega(H_2(S^n))$$

である．また教科書 p.47 の式 3.60 より

$$H_q(S^n) = nH_q(S)$$

であり，教科書 p.34 の式 3.5 より「エントロピーは

$$H_q(X) = -\sum_{i=1}^{M_X} p_X(a_i) \log_q p_X(a_i)$$

である」ことから

$$H_q(S) = -\frac{4}{9}\log_q \frac{4}{9} - \frac{5}{9}\log_q \frac{5}{9}$$

である．よって情報源 S の 1 記号当たりの平均符号語長は $\bar{l}/n$ であるので，

$$\text{上界：}\quad O\left(\frac{4}{9}\log_2 \frac{9}{4} + \frac{5}{9}\log_2 \frac{9}{5} + \frac{1}{n}\right)$$
$$\text{下界：}\quad \Omega\left(\frac{4}{9}\log_2 \frac{9}{4} + \frac{5}{9}\log_2 \frac{9}{5}\right)$$

である．

(2) 情報源 S の 11 次拡大は要素数 2^{11} であり，要素数 8 に 8 元の符号化で縮約するならば

$$\left\lceil \frac{2^{11} - 8}{8 - 1} \right\rceil = 292.$$

問題 3

(1) $s-1$

(2) 符号語長 i $(1 \leq i < s-1)$ の符号語数は 1，符号語長 $s-1$ の符号語数は 2

(3) $n=k$ の時，$p_{n+2}, p_{n+3}, \cdots, p_s$ が縮約されていると仮定すると

$$\begin{aligned} p_n &> p_{n+1} \\ p_n &> \sum_{j=i+1}^{s} p_j \end{aligned}$$

であるので縮約すべきは p_{n+1} と $\sum_{j=i+1}^{s} p_j$ である．
$n=k-1$ の時，$p_{n+2}, p_{n+3}, \cdots, p_s$ が縮約されているので $n=k$ と同様に，$p_{n+1}, p_{n+2}, \cdots, p_s$ が縮約できる．
$n=s-2$ の時，p_s は単独であるので縮約されていると考えられ，p_{s-1}, p_s を縮約できる．

問題 4

(1) 与式の左辺 $H_q(X|Y)$ は

$$\text{補題 } 3.3 : H_q(YZ) = H_q(Y) + H_q(Z|Y)$$

より，$H_q(X|Y) = H_q(XY) - H_q(Y) \cdots (*)$.

$$\text{補題 } 3.4 : H_q(YZ) \leq H_q(Y) + H_q(Z)$$

より，$H_q(X|Y) \leq H_q(X) + H_q(Y) - H_q(Y) = H_q(X)$ となり成立する．また (*) を

$$\begin{aligned} \text{補題 } 3.4 : \quad & H_q(YZ) = H_q(Y) + H_q(Z) \\ & (\text{ただし}, Y \text{ と } Z \text{ は独立}) \end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned} H_q(X|Y) &= H_q(X) + H_q(Y) - H_q(Y) \\ &= H_q(X) \end{aligned}$$

となり独立時のみ等号が成立する．

(2) この式は，Y の値を知った時の X の不確かさは X の不確かさに比べ同じであるか小さくなるということ．逆に言うと，X の不確かさは Y を知っても大きくなることはない．