数学C試験問題

２００６／０２／１３　担当　白旗慎吾

３，４年生で絶対に単位が必要であるが結果に自信のない者は$\boxed{1}$から$\boxed{4}$をすべて解き提出せよ（J棟６階の数理事務室へ１５日午後５時まで）．２年生は運を天にまかせること．

$\boxed{1}$ 関数 $f(x) = \sin^3(x),\ (0 \le x \le \pi)$ を考える．

1. 偶関数に拡張したときのフーリエ余弦級数を求めよ．
2. 奇関数に拡張したときのフーリエ正弦級数を求めよ．

$\boxed{2}$ 以下を求めよ．

1. 関数 $f(x) = 1/(1+x^2),\ -\infty < x < \infty$ のフーリエ変換．
2. 関数 $f(x) = exp(-a|x-b|),\ -\infty < x < \infty$ のフーリエ変換．ただし a, b は定数で，$a > 0$．
3. 関数 $F(u) = 1/(c+iu)$ の逆フーリエ変換．ただし c は定数．

$\boxed{3}$ $t \ge 0$ で定義された未知関数 $x(t)$ に対し，初期条件 $x(0) = 0$ の下で微分方程式

$$x'(t) + x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1, \\ 0, & 1 \le t, \end{cases}$$

をラプラス変換を用いて形式的に解け．また，この求めた解は $t = 1$ では微分できないが，$t \ne 1$ では解になることを確かめよ．

$\boxed{4}$ 波動方程式 $u_{tt} = c^2 u_{xx}, t \ge 0, 0 \le x \le L$ を境界条件

$$u_t(0,t) = 0,\ u_t(L,t) = 0$$

の下で考える．(この境界条件は両端固定の場合は満たされる)．

$$E(t) = \int_0^L (c^2 u_x^2(x,t) + u_t^2(x,t))dx$$

をこの系のエネルギーという（$a^2 u_x^2$ がポテンシャルエネルギー（位置エネルギー），u_t^2 が運動エネルギー）．

1. エネルギーの微分 $E_t(t)$ が 0，つまりエネルギーは不変（保存される．エネルギー保存則とよぶ）であることを示せ．ただし微分と積分の順序は自由に交換してよい．
2. 解が２つ（$u(x,t)$ と $v(x,t)$ とする）あったとするとき $u(x,t) - v(x,t)$ も解であることを示せ．
3. エネルギー保存則を用いて解が一意であることを示せ．

数学C 期末試験対策

2005 年度後期期末試験 (2006/02/05) 解答例

この解答例は多分に間違えてる可能性があるので注意しながら閲覧すること．問題文は Web ページにアップロードされているのでそちらを参照．間違いを見つければできる限り連絡すること．

$\boxed{1}$

$$f(x) = \sin^3(x)\ (0 \leq x \leq \pi)$$

と定義する．

関数 f を偶関数にすると，余弦級数は

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(|x|)\cos(nx)dx \\ &= \frac{12(1+(-1)^n)}{(n^4-10n^2+9)\pi}. \end{aligned}$$

関数 f を奇関数にすると，正弦級数は

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dt \\ &= \begin{cases} \frac{3}{4}, & n=1, \\ -\frac{1}{4}, & n=3, \\ 0, & \text{else.} \end{cases} \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ (1)

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-i\omega x} dx \\ &= \pi e^{-|\omega|} \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ (2)

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a|x-b|)e^{-i\omega x}dx \\ &= \int_{b}^{\infty} \exp(-a(x-b))e^{-i\omega x}dx \\ &\quad + \int_{-\infty}^{b} \exp(-a(b-x))e^{-i\omega x}dx \\ &= \frac{2ae^{-ib\omega}}{w^2+a^2} \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ (3)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{c+i\omega} e^{i\omega x} d\omega \\ &= \begin{cases} e^{-cx}, & 0<c,\ 0<x \\ -e^{-cx}, & c<0,\ x<0 \\ 0, & \text{else.} \end{cases} \end{aligned}$$

$\boxed{3}$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= x'(t)+x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1, \\ 0, & 1 \le t \end{cases} \\
\mathcal{L}[y(t)] &= (s\mathcal{L}[x(t)] - x(0)) + \mathcal{L}[x(t)] \\
\mathcal{L}[y(t)] &= (s+1)\mathcal{L}[x(t)] \\
\mathcal{L}[x(t)] &= \begin{cases} \frac{1}{s}, & 0 \le t < 1, \\ 0, & 1 \le t \end{cases} \\
x(t) &= \begin{cases} 1-e^{-t}, & 0 \le t < 1, \\ 0, & 1 \le t \end{cases}
\end{aligned}
$$

$\boxed{4}$ (1)

変数分離解 $u(x,t) = X(x)T(t)$ を仮定して，これを波動方程式に代入すると C を用い，

$$
XT'' = c^2X''T
$$
$$
C = \frac{c^2X''}{X} = \frac{T''}{T}
$$

と表せる．ここでエネルギーを変数分離解で置き換え，両辺を微分すると，

$$
\begin{aligned}
E(t) &= \int_0^L c^2(X'T)^2 + (XT')^2 dx \\
E_t(t) &= \int_0^L 2c^2X'^2TT' + 2X^2T'T''dx
\end{aligned}
$$

ここで $C_1 = c^2X''/X = T''/T$ を用いて，

$$
\begin{aligned}
E_t(t) &= \int_0^L 2c^2X'^2TT' + 2CX^2T'Tdx \\
&= 2TT'\int_0^L c^2X'^2 + CX^2dx \\
&= 2c^2TT'\int_0^L X'^2 + XX''dx \\
&= 2c^2TT'\left[XX'\right]_0^L dx \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$\boxed{4}$ (2)

波動方程式より，

$$
\frac{X}{T} = c^2\frac{X''}{T''}
$$

が成り立てば良い．

$u(x,t)$, $v(x,t)$ は解であるので，変数分離解 $u(x,t) = X_uT_u$, $v(x,t) = X_vT_v$ を用いて，

$$
c^2\frac{X''_u - X''_v}{X_u - X_v} = \frac{T''_u - T''_v}{T_u - T_v}
$$

未完

$\boxed{4}$ (3)

$$
CX = \frac{d^2X}{d^2x}c^2
$$
$$
\int CXd^2x = \int c^2d^2X
$$

未完