数学Ｃ　試験問題

２００８／０２／０５　担当　白旗慎吾

３年生以上で試験結果に自信のない者は、問題を解いて提出すること．
締切：２月６日１７時、提出場所：Ｊ棟６階の数理事務室

$\boxed{1}$ 関数 $\sin(\frac{1}{2}x),\ -\pi < x < \pi$ をフーリエ級数に展開せよ．

$\boxed{2}$ フーリエ変換を用いて積分方程式

$$\int_0^\infty f(x)\cos(ax)dx = \begin{cases} 1-a, & 0 \le a \le 1 \\ 0, & a > 1 \end{cases}$$

を解け（１章演習問題 15(1)）
（問題の式は a が負でも右辺の a を $|a|$ とすれば同じことである．関数 $f(x)$ は $x \ge 0$ でのみ定義されているが偶関数に拡張すれば左辺は

$$左辺 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty f(x)\cos(ax)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-iax}dx$$

である．したがってフーリエ逆変換により解を得るはず．）

$\boxed{3}$ 関数 $\frac{1}{\sqrt{t}}\cos(\sqrt{t})$ のラプラス変換を求めよ．ただしラプラス変換における s は正の数とする．
（任意の複素数 z に対して

$$\int_{-\infty}^\infty \exp(-(x-z)^2)dx = \int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}$$

を用いてよい．）

$\boxed{4}$ 熱伝導方程式 $u_t = a^2 u_{xx}, 0 \le x \le 1$ に対して以下の問に答えよ．

(1)　２つの解 $u(x,t),\ v(x,t)$ を持つとすると $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$ も解であることを示せ．

(2)　境界条件 $u(0,t) = u(1,t) = 0$ の下での解を $u(x,t)$ とおく．熱分布のエネルギーを

$$E_u(t) = \int_0^1 u^2(x,t)dx$$

と定義する．エネルギーは単調減少であることを示せ．ただし微分と積分は交換してよい．

(3)　初期条件 $u(x,0) = f(x)$ および上記の境界条件の下で解は存在すればただ一つであることを示せ．

数学C 期末試験対策

2007年度後期期末試験 (2008/02/05) 解答例

この解答例は多分に間違えてる可能性があるので注意しながら閲覧すること．問題文はWebページにアップロードされているのでそちらを参照．間違いを見つければできる限り連絡すること．

1

$$f(x) = \sin(\frac{1}{2}x)$$

と定義した時，関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開は，

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt, (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt, (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\frac{(2n-1)t}{2} - \cos\frac{(2n+1)t}{2} dt \\ &= \frac{8n(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)\pi} \end{aligned}$$

を用いて，

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n \sin nx) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)\pi}\sin nx \end{aligned}$$

と表せる．ちなみに，sin関数は奇関数であるので関数 $f(x)$ のフーリエ級数は正弦級数と一致する．

2

与式は関数 $f(x)$ のフーリエ変換であると考えることができ，展開した関数 $F(ai)$ を偶関数になるように拡張すると以下のような定義になる:

$$F(ai) = \begin{cases} 1-a, & 0 \le a \le 1 \\ 1+a, & -1 \le a \le 0 \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

この時，関数 $F(ai)$ をフーリエ逆変換すれば良く以下のような積分を解くと関数 $f(x)$ が求まる:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(ai)e^{iax}da \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^1 (1-a)e^{iax}da + \int_{-1}^0 (1+a)e^{iax}da\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}(\int_0^1 (1-a)e^{iax}da + \int_0^1 (1-a)e^{-iax}da) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 (1-a)(e^{iax}+e^{-iax})da \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^1 (1-a)\cos axda \\ &= \frac{1-\cos x}{x^2\pi}. \end{aligned}$$

3

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\cos(\sqrt{t})$$

と定義した時，$f(t)$ のラプラス変換は，

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \ (0 < s) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x)e^{-sx^2}dx \\ &= \Re\int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx^2+ix}dx \\ &= \Re\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{s}x-\frac{i}{2\sqrt{s}})^2}e^{-\frac{1}{4s}}dx \\ &= \Re\left(e^{-\frac{1}{4s}}s^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y-\frac{i}{2\sqrt{s}})^2}dy\right) \\ &= \sqrt{\pi}e^{-\frac{1}{4s}}s^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$\boxed{4}$ (1)

$$\begin{aligned} w_t &= u_t - v_t \\ w_{xx} &= u_{xx} - v_{xx} \end{aligned}$$

であり，u, v ともに解であることから，

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} \\ v_t &= a^2 v_{xx} \end{aligned}$$

を満たすので，

$$\begin{aligned} w_t &= a^2 u_{xx} - a^2 v_{xx} \\ &= a^2 w_{xx} \end{aligned}$$

を満たし，w も解と言える．

$\boxed{4}$ (2)

変数分離解 $u(x,t) = X(x)T(t)$ を仮定して，これを熱伝導方程式に代入すると定数 C_1 を用い，

$$XT' = a^2 X'' T$$
$$C_1 = \frac{T'}{T} = \frac{a^2 X''}{X}$$

と表せる．ここで関数 X は $X(0) = X(1) = 0$ より，フーリエ変換すると

$$X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\pi n x)$$

と表せるので，$X''/X = C_1/a^2 < 0$．つまり $C_1 < 0$ である．

$$\begin{aligned} \int T'/T dt &= \int dt C_1 \\ &= \log(T) \\ \log(T) &= tC_1 + C_2 \\ T &= e^{tC_1 + C_2} \end{aligned}$$

から与式を t で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_u(t) &= 2T(t)T'(t) \int_0^1 X^2(x) dx \\ &= 2C_1 e^{2tC_1 + 2C_2} C_3 < 0 \\ &\qquad (C_3 = \int_0^1 X^2(x) dx > 0). \end{aligned}$$

よってエネルギー $E_u(t)$ は単調減少である．

$\boxed{4}$ (3)

$$u(x,0) = T(0)X(x) = f(x)$$

より，$X(x) = f(x)/T(0)$ であり，

$$C_1 = \frac{a^2 X''}{X} = \frac{a^2 f''(x)}{f(x)}$$

で $f(x)$ から C_1 が確定する．よって，

$$\begin{aligned} u(x,t) &= f(x)\frac{T(t)}{T(0)} \\ &= \frac{e^{tC_1 + C_2}}{e^{C_2}} \\ &= e^{tC_1} \end{aligned}$$

より $u(x,t)$ は確定する．