数学 D 期末試験対策

2008 年後期期末試験解答例

Written by imos on 2009/01/28.

この解答例は多分に間違えてる可能性があるので注意しながら閲覧すること．問題文は Web ページにアップロードされているのでそちらを参照．間違いを見つければできる限り連絡すること．

$\boxed{1}$ (1)

$b_ic_i \equiv 1(\mathrm{mod}\ m_i)$ となる整数 c_i が存在するとは，$b_ic_i - 1 = m_iy$ となる整数 c_i, y が存在するということであり，すなわち $b_ic_i - m_iy = 1$ である．これは「0 でない整数 a, b の最大公約数を d とすれば，$d = ax + by$ となる整数 x, y が存在する.」ということと，b_i と m_i が互いに素であることから証明される．

$\boxed{1}$ (2)

$x = a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + a_3b_3c_3$ は，(1) より $b_ic_i \equiv 1(\mathrm{mod}\ m_i)$ であり，また $b_i \equiv 0(\mathrm{mod}\ m_j)$ $(i \neq j)$ であることより，$x \equiv a_1 + 0 + 0(\mathrm{mod}\ m_1)$，$x \equiv 0 + a_2 + 0(\mathrm{mod}\ m_2)$，$x \equiv 0 + 0 + a_3(\mathrm{mod}\ m_3)$ となり証明される．

$\boxed{1}$ (3)

$x \not\equiv x'(\mathrm{mod}\ m)$ であれば $x - x' \equiv d(\mathrm{mod}\ m)$ $(d \neq 0)$ となる d が存在する．これは (*) の解であることから m_i $(i = 1, 2, 3)$ の全てで割り切れることから $d = n\mathrm{LCM}(m_1, m_2, m_3) = nm$ $(n \in \mathbb{Z})$ である必要があるので矛盾する．よって，$x \equiv x'(\mathrm{mod}\ m)$ である．

$\boxed{1}$ (4)

この程度の大きさなら気合いで探すのも可．ユークリッドの互除法を用いて c_i を求める．答えは 101．

$\boxed{2}$ (1)

$\sigma^4 = e,\ \tau\sigma = \sigma^3\tau$ より，σ は正方形の 90 度回転，τ は裏返しに相当する．

$\boxed{2}$ (2)

$D_4 = \{e,\ \sigma,\ \sigma^2,\ \sigma^3,\ \tau,\ \sigma\tau,\ \sigma^2\tau,\ \sigma^3\tau\}$

$\boxed{2}$ (3)

$\sigma^3\tau\sigma\tau\sigma^2\tau = \tau$

$\boxed{2}$ (4)

H の要素 $h = \tau$ と D_4 の要素 $g = \sigma$ で正規部分群であるかを確認する．もし H が D_4 の正規部分群であれば $ghg^{-1} = h$ となるはずであるが，$\sigma\tau\sigma^3 = \tau\sigma^2 \neq \tau$ であるので正規部分群ではない．

$\boxed{2}$ (5)

H に e が含まれるので，D_4 の全てが含まれる．よって左剰余類分解した結果は D_4 と同値であり $\{e,\ \sigma,\ \sigma^2,\ \sigma^3,\ \tau,\ \sigma\tau,\ \sigma^2\tau,\ \sigma^3\tau\}$ である．

$\boxed{3}$ (1)

$p(x)$ を Z_3 上の多項式として因数分解すると $p(x) = x^3+x+1 = x^3-2x+4 = (x^2-2x+2)(x+2)$ となる．それに対して $q(x)$ は仮に因数分解することができると仮定して $(ax^2+bx+c)(dx+e) = adx^3+(ae+bd)x^2+(cd+be)x+ce$ とおくと，$ad = 1,\ ae+bd = 0,\ cd+be = 2,\ ce = 1$ となり，$a = d \neq 0,\ c = e \neq 0\ \rightarrow\ a(b+c) = 0,\ (a+b)c = 2\ \rightarrow\ b = -c,\ (a-c)c = 2$ である必要があり，$a \neq 0$ より矛盾．よって $q(x)$ は Z_3 上で既約である．

$\boxed{3}$ (2)

α が $q(x)=0$ の解であることから $\alpha^3=-2\alpha-1$ である．これを用いて $(\alpha^2+\alpha+1)(\alpha^2+1)=\alpha^4+\alpha^3+2\alpha^2+\alpha+1=(\alpha+1)(-2\alpha-1)+2\alpha^2+\alpha+1=-2\alpha$

$\boxed{3}$ (3)

$(\alpha^2+\alpha+1)(x\alpha^2+y\alpha+z)=x\alpha^4+(x+y)\alpha^3+(x+y+z)\alpha^2+(y+z)\alpha+z=(x\alpha+x+y)(-2\alpha-1)+(x+y+z)\alpha^2+(y+z)\alpha+z=(-x+y+z)\alpha^2+(-3x-y+z)\alpha+(-x-y+z)$ よって $x=1/2, y=-1/2, z=1$ となり，これは Z_3 において $x=2$，$y=-2=1$，$z=1$ であるので，$(\alpha^2+\alpha+1)^{-1}=2\alpha^2+\alpha+1$ となる．

$\boxed{3}$ (4)

ax^3+bx^2+cx+d の解が α^2+1 になればよい．$(\alpha^2+1)^2=\alpha(-2\alpha-1)+2\alpha^2+1=-\alpha+1$，$(-\alpha+1)(\alpha^2+1)=-\alpha^3+\alpha^2-\alpha+1=\alpha^2+\alpha+2$，$a(\alpha^2+\alpha+2)+b(-\alpha+1)+c(\alpha^2+1)+d=(a+c)\alpha^2+(a-b)\alpha+(2a+b+c+d)=0$，$a=b=1, c=-1, d=-2$．よって x^3+x^2-x-2 の解は α^2+1 を含む．

$\boxed{3}$ (5)

α の位数は 26 であるので，元の位数として可能な自然数はその約数である 2，13，26 である．